Formulario de Precálculo.

1. Los Números.

1. **Leyes de los exponentes y radicales.**

a) $a^m a^n = a^{m+n}$ b) $(a^m)^n = a^{mn}$ c) $(ab)^n = a^n b^n$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ e) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ f) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

g) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ h) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ i) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

j) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ k) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ l) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

2. **Productos Notables.**

a) Binomios Conjugados: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
b) Binomio al Cuadrado: $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
c) Binomio al Cubo: $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
d) $(x+y)^2 = x^2 + 2\,xy + y^2$
e) $(x-y)^2 = x^2 - 2\,xy + y^2$
f) $(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2y + 3\,xy^2 + y^3$
g) $(x-y)^3 = x^3 - 3\,x^2y + 3\,xy^2 - y^3$
h) $(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3y + 6\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + y^4$
i) $(x-y)^4 = x^4 - 4\,x^3y + 6\,x^2y^2 - 4\,xy^3 + y^4$
j) $(x+y)^5 = x^5 + 5\,x^4y + 10\,x^3y^2 + 10\,x^2y^3 + 5\,xy^4 + y^5$
k) $(x-y)^5 = x^5 - 5\,x^4y + 10\,x^3y^2 - 10\,x^2y^3 + 5\,xy^4 - y^5$

3. **Teorema del Binomio.** Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Nota: $\binom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

4. **Factores Notables.**

a) Diferencia de Cuadrados: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
b) Suma de Cubos: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
c) Diferencia de Cubos: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
d) Trinomio Cuadrado Perfecto: $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
e) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
f) $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$
g) $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$
h) $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)\left(x^2 + y^2\right)$
i) $x^5 - y^5 = (x-y)\left(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4\right)$
j) $x^5 + y^5 = (x+y)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)$
k) $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right)$
l) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right)$
m) $x^4 + 4\,y^4 = \left(x^2 - 2\,xy + 2\,y^2\right)\left(x^2 + 2\,xy + 2\,y^2\right)$

5. **Leyes de los logaritmos.**

a) $\log_a(P\,Q) = \log_a(P) + \log_a(Q)$
b) $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a(P) - \log_a(Q)$
c) $\log_a(Q^n) = n\log_a(Q)$
d) $a^{\log_a(x)} = x$
e) $\log_a(a^x) = x$
f) $\log_a(1) = 0$
g) $a^{\log_a(a)} = 1$
h) $\log(x) = \log_{10}(x)$
i) $\ln(x) = \log_e(x)$
j) Cambio de base: $\log_a(Q) = \frac{\log_b(Q)}{\log_b(a)}$

2. Soluciones Exactas de ecuaciones Algebraicas

6. **Soluciones Exactas de Ecuaciones Algebraicas.**

a) La **Ecuación Cuadrática**: $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación.
i) Si $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y diferentes.
ii) Si $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales e iguales.
iii) Si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas conjugadas.

b) Para la **Ecuación Cúbica**: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sean:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9}, \qquad R = \frac{9ab - 27c - 2a^3}{54}$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \qquad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Entonces las soluciones son:

$$x_1 = S + T - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\left(\frac{S+T}{2} + \frac{a}{3}\right) + \left(\frac{(S-T)\sqrt{3}}{2}\right) i$$

$$x_3 = -\left(\frac{S+T}{2} + \frac{a}{3}\right) - \left(\frac{(S-T)\sqrt{3}}{2}\right) i$$

El número $Q^3 + R^2$ se llama *discriminante* de la ecuación.
i) Si $Q^3 + R^2 > 0$, hay una raíz real y dos son complejas conjugadas.
ii) Si $Q^3 + R^2 = 0$, las raíces son reales y por lo menos dos son iguales.
iii) Si $Q^3 + R^2 < 0$, las raíces son reales y diferentes.

3. Funciones Trigonométricas.

3.1. Relaciones entre Funciones Trigonométricas.

$\csc(A) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(A)}$	$\operatorname{sen}^2(A) + \cos^2(A) = 1$
$\sec(A) = \dfrac{1}{\cos(A)}$	$\sec^2(A) - \tan^2(A) = 1$
$\tan(A) = \dfrac{\operatorname{sen}(A)}{\cos(A)}$	$\csc^2(A) - \cot^2(A) = 1$
$\cot(A) = \dfrac{\cos(A)}{\operatorname{sen}(A)} = \dfrac{1}{\tan(A)}$	

3.2. Potencias de Funciones Trigonométricas.

$\operatorname{sen}^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$

$\operatorname{sen}^3(A) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(A) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3A)$

$\cos^3(A) = \frac{3}{4}\cos(A) + \frac{1}{4}\cos(3A)$

$\operatorname{sen}^4(A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2A) + \frac{1}{8}\cos(4A)$

$\cos^4(A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2A) + \frac{1}{8}\cos(4A)$

$\operatorname{sen}^5(A) = \frac{5}{8}\operatorname{sen}(A) - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(3A) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(5A)$

$\cos^5(A) = \frac{5}{8}\cos(A) + \frac{5}{16}\cos(3A) + \frac{1}{16}\cos(5A)$

3.3. Suma, Diferencia y Producto las Funciones Trigonométricas.

$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos(A) - \cos(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B-A}{2}\right)$

$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2}\big[\cos(A-B) - \cos(A+B)\big]$

$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\big[\cos(A-B) + \cos(A+B)\big]$

$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\big]$

4. Funciones Hiperbólicas.

Seno hiperbólico de x = $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico de x = $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangente hiperbólica de x = $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Cosecante hiperbólica de x = $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Secante hiperbólica de x = $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

Cotangente hiperbólica de x = $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

4.1. Relación entre las Funciones Hiperbólicas.

$\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$

$\coth(x) = \dfrac{1}{\tanh(x)} = \dfrac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}$

$\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)}$

$\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)}$

$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$

$\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$

Formulario de Cálculo.

Derivadas.

En este formulario: $k, c \in \mathbb{R}$ son constantes reales, $f = f(x)$, $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones que dependen de x.

Fórmulas Básicas:

Función:	Su Derivada:
$f = k$	$f' = 0$

Linealidad de la derivada:

$f = k \cdot u$	$f' = k \cdot u'$
$f = u \pm v$	$f' = u' \pm v'$
$f = k \cdot u \pm c \cdot v$	$f' = k \cdot u' \pm c \cdot v'$

Regla del Producto:

$f = u \cdot v$	$f' = u \cdot v' + v \cdot u'$

Regla del Cociente:

$f = \dfrac{u}{v}$	$f' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la Cadena (Composición de funciones)

$f = u(x) \circ v(x)$	$f' = [u(v(x))]' \cdot v'(x)$

Regla de la Potencia:

$f = v^n$	$f' = n \cdot v^{n-1} \cdot v'$
$f = k \cdot v^n$	$f' = k \cdot n \cdot v^{n-1} \cdot v'$

Funciones Exponenciales:

$f = e^u$	$f' = e^u \cdot u'$
$f = a^u$	$f' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$

Funciones Logarítmicas:

$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$
$f = \log_a(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)}$

Una Función elevada a otra Función:

$f = u^v$	$f' = u^v \left[v' \cdot \ln(u) + \dfrac{v \cdot u'}{u} \right]$

Funciones Trigonométricas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{sen}(u)$	$f' = \cos(u) \cdot u'$
$f = \cos(u)$	$f' = -\operatorname{sen}(u) \cdot u'$
$f = \tan(u)$	$f' = \sec^2(u) \cdot u'$
$f = \csc(u)$	$f' = -\csc(u)\cot(u) \cdot u'$
$f = \sec(u)$	$f' = \sec(u)\tan(u) \cdot u'$
$f = \cot(u)$	$f' = -\csc^2(u) \cdot u'$

Funciones Trigonométricas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arc\,sen}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\ ; \quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arc\,cos}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\ ; \quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \arctan(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$f = \operatorname{arccsc}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$f = \operatorname{arcsec}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\ ; \quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arccot}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{1+u^2}\ ; \quad \lvert u\rvert > 1$

Funciones Hiperbólicas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{senh}(u)$	$f' = \cosh(u) \cdot u'$
$f = \cosh(u)$	$f' = \operatorname{senh}(u) \cdot u'$
$f = \tanh(u)$	$f' = \operatorname{sech}^2(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{csch}(u)$	$f' = -\operatorname{csch}(u)\coth(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{sech}(u)$	$f' = -\operatorname{sech}(u)\tanh(u) \cdot u'$
$f = \coth(u)$	$f' = -\operatorname{csch}^2(u) \cdot u'$

Funciones Hiperbólicas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arcsenh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f = \operatorname{arccosh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\ ; \quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arctanh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1-u^2}\ ; \quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arccsch}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}\ ; \quad u \neq 0$
$f = \operatorname{arcsech}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}\ ; \quad 0 < u < 1$
$f = \operatorname{arccoth}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1-u^2}\ ; \quad \lvert u\rvert > 1$

Integrales.

En este formulario: $k, w, C \in \mathbb{R}$ son constantes reales, $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones que dependen de x.

Fórmulas Básicas.

1) $\int 0dx = C$

2) $\int kdx = kx + C$

3) $\int (k \cdot u \pm w \cdot v)dx = k \int udx + w \int vdx + C$

4) Regla de la potencia $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ para $n \neq -1$.

5) Regla exponencial $\int e^u du = e^u$

6) Regla logarítmica $\int \ln \lvert u\rvert \, du = u \ln \lvert u\rvert - u$

7) $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

8) $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln \lvert u\rvert + C$

Trigonométricas.

9) $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u$

10) $\int \cos u du = \operatorname{sen} u$

11) $\int \tan u du = \ln[\sec u] = -\ln[\cos u] + C$

12) $\int \cot u du = \ln \operatorname{sen} u$

13) $\int \sec u du = \ln[\sec u + \tan u] = \ln\left[\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

14) $\int \csc u du = \ln[\csc u - \cot u] = \ln\left[\tan \frac{u}{2}\right]$

15) $\int \sec^2 u du = \tan u$

16) $\int \csc^2 u du = -\cot u$

17) $\int \tan^2 u du = \tan u - u$

18) $\int \cot^2 u du = -\cot u - u$

19) $\int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}[u - \operatorname{sen} u \cos u]$

20) $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}[u + \operatorname{sen} u \cos u]$

21) $\int \sec u \tan u du = \sec u$

22) $\int \csc u \cot u du = -\csc u$

Hiperbólicas.

23) $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u$

24) $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u$

25) $\int \tanh u du = \ln[\cosh u]$

26) $\int \coth u du = \ln[\operatorname{senh} u]$

27) $\int \operatorname{sech} u du = \operatorname{sen}^{-1}[\tanh u] = 2\tan^{-1}[e^u]$

28) $\int \operatorname{csch} u du = \ln\left[\tanh \frac{u}{2}\right] = -2\coth^{-1}[e^u]$

29) $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u$

30) $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u$

31) $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u$

32) $\int \coth^2 u du = u - \coth u$

33) $\int \operatorname{senh}^2 u du = \frac{\operatorname{senh} 2u}{4} - \frac{u}{2} = \frac{1}{2}[\operatorname{senh} u \cosh u - u]$

34) $\int \cosh^2 u du = \frac{\operatorname{senh} 2u}{4} + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}[\operatorname{senh} u \cosh u + u]$

35) $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u$

36) $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u$

Integrales con $au + b$.

37) $\int \frac{du}{au+b} = \frac{1}{a}\ln(au+b)$

38) $\int \frac{udu}{au+b} = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(au+b)$

39) $\int \frac{u^2du}{au+b} = \frac{(au+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(au+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(au+b)$

40) $\int \frac{u^3du}{au+b} = \frac{(au+b)^3}{3a^4} - \frac{3b(au+b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(au+b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4}\ln(au+b)$

41) $\int \frac{du}{u(au+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{u}{au+b}\right)$

42) $\int \frac{du}{u^2(au+b)} = -\frac{1}{bu} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{au+b}{u}\right)$

43) $\int \frac{du}{(au+b)^2} = \frac{-1}{a(au+b)}$

44) $\int \frac{udu}{(au+b)^2} = \frac{b}{a^2(au+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(au+b)$

45) $\int \frac{u^2du}{(au+b)^2} = \frac{au+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(au+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(au+b)$

46) $\int \frac{du}{u(au+b)^2} = \frac{1}{b(au+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{u}{au+b}\right)$

47) $\int \frac{du}{u^2(au+b)^2} = \frac{-a}{b^2(au+b)} - \frac{1}{b^2u} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{au+b}{u}\right)$

48) $\int \frac{du}{(au+b)^3} = \frac{-1}{2(au+b)^2}$

49) $\int \frac{udu}{(au+b)^3} = \frac{-1}{a^2(au+b)} + \frac{b}{2a^2(au+b)^2}$

50) $\int \frac{u^2du}{(au+b)^3} = \frac{2b}{a^3(au+b)} - \frac{b^2}{2a^3(au+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(au+b)$

51) $\int (au+b)\,du = \frac{(au+b)^2}{2a}$

52) $\int (au+b)^n\,du = \frac{(au+b)^{n+1}}{(n+1)a}$ para $n \neq -1$

53) $\int u\,(au+b)^n\,du = \frac{(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$ para $n \neq -1, -2$

54) $\int u^2\,(au+b)^n\,du = \frac{(au+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$

para $n \neq -1, -2, -3$

55) $\int u^m\,(au+b)^n\,du =$

$$= \begin{cases} \frac{u^{m+1}(au+b)^n}{m+n+1} + \frac{nb}{m+n+1}\int u^m\,(au+b)^{n-1}\,du \\ \frac{u^m(au+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \frac{mb}{(m+n+1)a}\int u^{m-1}\,(au+b)^n\,du \\ \frac{-u^{m+1}(au+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{m+n+2}{(n+1)b}\int u^m\,(au+b)^{n+1}\,du \end{cases}$$

Integrales con $\sqrt{au+b}$.

56) $\int \frac{du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2\sqrt{au+b}}{a}$

57) $\int \frac{udu}{\sqrt{au+b}} = \frac{2(au-2b)}{3a^2}\sqrt{au+b}$

58) $\int \frac{u^2du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2\left(3a^2u^2-4ab\,u+8b^2\right)}{15a^3}\sqrt{au+b}$

59) $\int \frac{du}{u\sqrt{au+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\frac{\sqrt{au+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{au+b}+\sqrt{b}}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{au+b}{-b}} \end{cases}$

60) $\int \frac{du}{u^2\sqrt{au+b}} = -\frac{\sqrt{au+b}}{bu} - \frac{a}{2b}\int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$

61) $\int \sqrt{au+b}\,du = \frac{2\sqrt{(au+b)^3}}{3a}$

62) $\int u\sqrt{au+b}\,du = \frac{2(3au-2b)}{15a^2}\sqrt{(au+b)^3}$

63) $\int u^2\sqrt{au+b}\,du = \frac{2\left(15a^2u^2-12ab\,u+8b^2\right)}{105a^3}\sqrt{(au+b)^3}$

64) $\int \frac{\sqrt{au+b}}{u}du = 2\sqrt{au+b} + b\int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$

65) $\int \frac{\sqrt{au+b}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{au+b}}{u} + \frac{a}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{au+b}}$

66) $\int \frac{u^m}{\sqrt{au+b}}du = \frac{2u^m\sqrt{au+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a}\int \frac{u^{m-1}}{\sqrt{au+b}}du$

67) $\int \frac{du}{u^m\sqrt{au+b}} = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{au+b}}$

68) $\int u^m\sqrt{au+b}du = \frac{2u^m}{(2m+3)a}(au+b)^{3/2}$

$- \frac{2mb}{(2m+3)a}\int u^{m-1}\sqrt{au+b}du$

69) $\int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m}du = -\frac{\sqrt{au+b}}{(m-1)u^{m-1}} + \frac{a}{2(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{au+b}}$

70) $\int \frac{\sqrt{au+b}}{u^m}du = \frac{-(au+b)^{3/2}}{(m-1)bu^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b}\int \frac{\sqrt{au+b}}{u^{m-1}}du$

71) $\int (au+b)^{m/2}du = \frac{2(au+b)^{(m+2)/2}}{a(m+2)}$

72) $\int u(au+b)^{m/2}du = \frac{2(au+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \frac{2b(au+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$

73) $\int u^2(au+b)^{m/2}du = \frac{2(au+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \frac{4b(au+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)}$

$+ \frac{2b^2(au+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)}$

74) $\int \frac{(au+b)^{m/2}}{u}du = \frac{2(au+b)^{m/2}}{m} + b\int \frac{(au+b)^{(m-2)/2}}{u}du$

75) $\int \frac{(au+b)^{m/2}}{u^2}du = -\frac{(au+b)^{(m+2)/2}}{bu} + \frac{ma}{2b}\int \frac{(au+b)^{m/2}}{u}du$

76) $\int \frac{du}{u(au+b)^{m/2}} = \frac{2}{b(m-2)(au+b)^{(m-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{du}{u(au+b)^{(m-2)/2}}$

Integrales con $u^2 + a^2$.

77) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

78) $\int \frac{udu}{u^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+a^2\right)$

79) $\int \frac{u^2du}{u^2+a^2} = u - a\,\tan^{-1}\frac{u}{a}$

80) $\int \frac{u^3du}{u^2+a^2} = \frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u^2+a^2\right)$

81) $\int \frac{du}{u(u^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{u^2}{u^2+a^2}\right)$

82) $\int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2u} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

83) $\int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2u^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{u^2+a^2}\right)$

84) $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

85) $\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(u^2+a^2)}$

86) $\int \frac{u^2du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{-u}{2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

87) $\int \frac{u^3du}{(u^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)$

88) $\int \frac{du}{u(u^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{(u^2+a^2)}\right)$

89) $\int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4u} - \frac{u}{2a^4(u^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

90) $\int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{u^2}{u^2+a^2}\right)$

91) $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}$

92) $\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}$

93) $\int \frac{du}{u(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u(u^2+a^2)^{n-1}}$

94) $\int \frac{u^mdu}{(u^2+a^2)^n} = \int \frac{u^{m-2}du}{(u^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{u^{m-2}du}{(u^2+a^2)^n}$

95) $\int \frac{du}{u^m(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^m(u^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^{m-2}(u^2+a^2)^n}$

Integrales con $u^2 - a^2$.

96) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a}$

97) $\int \frac{udu}{u^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(u^2-a^2\right)$

98) $\int \frac{u^2du}{u^2-a^2} = u + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

99) $\int \frac{u^3du}{u^2-a^2} = \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u^2-a^2\right)$

100) $\int \frac{du}{u(u^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{u^2-a^2}{u^2}\right)$

101) $\int \frac{du}{u^2(u^2-a^2)} = \frac{1}{a^2u} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

102) $\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2u^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{u^2-a^2}\right)$

103) $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^2} = \frac{-u}{2a^2(u^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

104) $\int \frac{udu}{(u^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(u^2-a^2)}$

105) $\int \frac{u^2du}{(u^2-a^2)^2} = \frac{-u}{2(u^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

106) $\int \frac{u^3du}{(u^2-a^2)^2} = \frac{-a}{2(u^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln\left(u^2-a^2\right)$

107) $\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(u^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{u^2-a^2}\right)$

108) $\int \frac{du}{u^2(u^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4u} - \frac{u}{2a^4(u^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

109) $\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4u^2} - \frac{1}{2a^4(u^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{u^2}{u^2-a^2}\right)$

110) $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^n} = \frac{-u}{2a^2(n-1)(u^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{n-1}}$

111) $\int \frac{udu}{(u^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(u^2-a^2)^{n-1}}$

112) $\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2a^2(n-1)(u^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{n-1}}$

113) $\int \frac{u^mdu}{(u^2-a^2)^n} = \int \frac{u^{m-2}du}{(u^2-a^2)^{n-1}} + a^2\int \frac{u^{m-2}du}{(u^2-a^2)^n}$

114) $\int \frac{du}{u^m(u^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^{m-2}(u^2-a^2)^n} + \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^m(u^2-a^2)^{n-1}}$

Integrales con $a^2 - u^2, u^2 < a^2$.

115) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}$

116) $\int \frac{udu}{a^2-u^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2-u^2)$

117) $\int \frac{u^2du}{a^2-u^2} = -u + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)$

118) $\int \frac{u^3du}{a^2-u^2} = -\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(a^2-u^2)$

119) $\int \frac{du}{u(a^2-u^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{u^2}{a^2-u^2}\right)$

120) $\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)} = \frac{1}{a^2u} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)$

121) $\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)} = -\frac{1}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{a^2-u^2}\right)$

122) $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^2} = \frac{u}{2a^2(a^2-u^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)$

123) $\int \frac{udu}{(a^2-u^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-u^2)}$

124) $\int \frac{u^2du}{(a^2-u^2)^2} = \frac{u}{2(a^2-u^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)$

125) $\int \frac{u^3du}{(a^2-u^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-u^2)} + \frac{1}{2}\ln(a^2-u^2)$

126) $\int \frac{du}{u(a^2-u^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-u^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{u^2}{a^2-u^2}\right)$

127) $\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^2} = -\frac{1}{a^4u} + \frac{u}{2a^4(a^2-u^2)} + \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)$

128) $\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^2} = -\frac{1}{2a^4u^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-u^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{u^2}{a^2-u^2}\right)$

129) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$

130) $\int \frac{xdx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}}$

Integrales con $\sqrt{u^2 + a^2}$.

131) $\int \sqrt{u^2+a^2}du = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

132) $\int u\sqrt{u^2+a^2}du = \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{3}$

133) $\int u^2\sqrt{u^2+a^2}du = \frac{u\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{4} - \frac{a^2u\sqrt{u^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

134) $\int u^3\sqrt{u^2+a^2}du = \frac{\left(u^2+a^2\right)^{5/2}}{5} - \frac{a^2\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{3}$

135) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}$

136) $\int \frac{udu}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sqrt{u^2+a^2}$

137) $\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

138) $\int \frac{u^3du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{u^2+a^2}$

139) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

140) $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^2u}$

141) $\int \frac{du}{u^3\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

142) $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}du = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

143) $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

144) $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u^3}du = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{2u^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

145) $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}$

146) $\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+a^2}}$

147) $\int \frac{u^2du}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2+a^2}} + \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

148) $\int \frac{u^3du}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}$

149) $\int \frac{du}{u(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{u^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

150) $\int \frac{du}{u^2(u^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^4 u} - \frac{u}{a^4\sqrt{u^2+a^2}}$

151) $\int \frac{du}{u^3(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2u^2\sqrt{u^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{u^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

152) $\int \left(u^2+a^2\right)^{3/2} du = \frac{u\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2u\sqrt{u^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

153) $\int u\left(u^2+a^2\right)^{3/2} du = \frac{\left(u^2+a^2\right)^{5/2}}{5}$

154) $\int u^2\left(u^2+a^2\right)^{3/2} du = \frac{u\left(u^2+a^2\right)^{5/2}}{6} - \frac{a^2u\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{24} - \frac{a^4u\sqrt{u^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

155) $\int \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{u} du = \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{u^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

156) $\int \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{u^2} du = -\frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{u} + \frac{3u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

157) $\int \frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{u^3} du = -\frac{\left(u^2+a^2\right)^{3/2}}{2u^2} + \frac{3}{2}\sqrt{u^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

Integrales con $\sqrt{u^2-a^2}$.

158) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

159) $\int \frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}} = \sqrt{u^2-a^2}$

160) $\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

161) $\int \frac{u^3du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{u^2-a^2}$

162) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

163) $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u}$

164) $\int \frac{du}{u^3\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

165) $\int \sqrt{u^2-a^2}\ du = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

166) $\int u\sqrt{u^2-a^2}du = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{3}$

167) $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}du = \frac{u\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{4} + \frac{a^2u\sqrt{u^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

168) $\int u^3\sqrt{u^2-a^2}du = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{5/2}}{5} + \frac{a^2\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{3}$

169) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a}$

170) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

171) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^3}du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2u^2} + \frac{1}{2a}\sec^{-1}\frac{u}{a}$

172) $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}}$

173) $\int \frac{udu}{(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2-a^2}}$

174) $\int \frac{u^2du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}} + \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

175) $\int \frac{u^3du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{u^2-a^2}}$

176) $\int \frac{du}{u(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\sec^{-1}\frac{u}{a}$

177) $\int \frac{du}{u^2(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^4u} - \frac{u}{a^4\sqrt{u^2-a^2}}$

178) $\int \frac{du}{u^3(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2u^2\sqrt{u^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{u^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\sec^{-1}\frac{u}{a}$

179) $\int \left(u^2-a^2\right)^{3/2} du = \frac{u\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2u\sqrt{u^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

180) $\int u\left(u^2-a^2\right)^{3/2} du = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{5/2}}{5}$

181) $\int u^2\left(u^2-a^2\right)^{3/2} du = \frac{u\left(u^2-a^2\right)^{5/2}}{6} + \frac{a^2u\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{24} - \frac{a^4u\sqrt{u^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

182) $\int u^3\left(u^2-a^2\right)^{3/2} du = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{7/2}}{7} + \frac{a^2\left(u^2-a^2\right)^{5/2}}{5}$

183) $\int \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{u} du = \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{u^2-a^2} + a^3\sec^{-1}\frac{u}{a}$

184) $\int \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{u^2} du = -\frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{u} + \frac{3u\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$

185) $\int \frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{u^3} du = -\frac{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}}{2u^2} + \frac{3\sqrt{u^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a\sec^{-1}\frac{u}{a}$

Integrales con $\sqrt{a^2-u^2}$.

186) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{sen}^{-1}\ \frac{u}{a}$

187) $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2-u^2}$

188) $\int \frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\ \frac{u}{a}$

189) $\int \frac{u^3du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-u^2}$

190) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

191) $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}$

192) $\int \frac{du}{u^3\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2a^2u^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

193) $\int \sqrt{a^2-u^2}\ du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\text{sen}^{-1}\ \frac{u}{a}$

194) $\int u\sqrt{a^2-u^2}\ du = -\frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{3}$

195) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}du = -\frac{u\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{4} + \frac{a^2u\sqrt{a^2-u^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\text{sen}^{-1}\ \frac{u}{a}$

196) $\int u^3\sqrt{a^2-u^2}du = \frac{\left(a^2-u^2\right)^{5/2}}{5} - \frac{a^2\left(a^2-u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$

197) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

198) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

199) $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^3}du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2u^2} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

200) $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}$

201) $\int \frac{udu}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$

202) $\int \frac{u^2du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

203) $\int \frac{u^3du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$

204) $\int \frac{du}{u(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

205) $\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^4u} + \frac{u}{a^4\sqrt{a^2-u^2}}$

206) $\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2u^2\sqrt{a^2-u^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-u^2}}$
$- \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

207) $\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = \frac{u\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2u\sqrt{a^2-u^2}}{8}$
$+ \frac{3}{8}a^4\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

208) $\int u\left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = -\frac{\left(a^2-u^2\right)^{5/2}}{5}$

209) $\int u^2\left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = -\frac{u\left(a^2-u^2\right)^{5/2}}{6} + \frac{a^2u\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{24}$
$+ \frac{a^4u\sqrt{a^2-u^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

210) $\int u^3\left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = \frac{\left(a^2-u^2\right)^{7/2}}{7} - \frac{a^2\left(a^2-u^2\right)^{5/2}}{5}$

211) $\int \frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{u}du = \frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-u^2}$
$- a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

212) $\int \frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{u^2}du = -\frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{u} - \frac{3u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

213) $\int \frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{u^3}du = -\frac{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}}{2u^2} - \frac{3\sqrt{a^2-u^2}}{2}$
$+ \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

Integrales con au^2+bu+c.

214) $\int \frac{du}{au^2+bu+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{2au+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left(\frac{2au+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2au+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$

215) $\int \frac{udu}{au^2+bu+c} = \frac{1}{2a}\ln\left(au^2+bu+c\right) - \frac{b}{2a}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

216) $\int \frac{u^2du}{au^2+bu+c} = \frac{u}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln\left(au^2+bu+c\right)$
$+ \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

217) $\int \frac{du}{u(au^2+bu+c)} = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{u^2}{au^2+bu+c}\right) - \frac{b}{2c}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

218) $\int \frac{du}{u^2(au^2+bu+c)} = \frac{b}{2c^2}\ln\left(\frac{au^2+bu+c}{u^2}\right) - \frac{1}{cu}$
$+ \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

219) $\int \frac{du}{(au^2+bu+c)^2} = \frac{2au+b}{(4ac-b^2)(au^2+bu+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

220) $\int \frac{udu}{(au^2+bu+c)^2} = -\frac{bu+2c}{(4ac-b^2)(au^2+bu+c)} - \frac{b}{4ac-b^2}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

221) $\int \frac{u^2du}{(au^2+bu+c)^2} = \frac{\left(b^2-2ac\right)u+bc}{a(4ac+b^2)(au^2+bu+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2}\int\frac{du}{au^2+bu+c}$

222) $\int \frac{du}{u(au^2+bu+c)^2} = \frac{1}{2c(au^2+bu+c)} - \frac{b}{2c}\int\frac{du}{(au^2+bu+c)^2}$
$+ \frac{1}{c}\int\frac{du}{u(au^2+bu+c)}$

223) $\int \frac{du}{u^2(au^2+bu+c)^2} = -\frac{1}{cu(au^2+bu+c)} - \frac{3a}{c}\int\frac{du}{(au^2+bu+c)^2}$
$- \frac{2b}{c}\int\frac{du}{u(au^2+bu+c)^2}$

224) $\int \frac{u^m du}{au^2+bu+c} = \frac{u^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a}\int\frac{u^{m-2}du}{au^2+bu+c} - \frac{b}{a}\int\frac{u^{m-1}du}{au^2+bu+c}$

225) $\int \frac{du}{u^n(au^2+bu+c)} = -\frac{1}{(n-1)cu^{n-1}} - \frac{b}{c}\int\frac{du}{u^{n-1}(au^2+bu+c)}$
$- \frac{a}{c}\int\frac{du}{u^{n-2}(au^2+bu+c)}$

Integrales con u^3+a^3.

226) $\int \frac{du}{u^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(u+a)^2}{u^2-au+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$

227) $\int \frac{udu}{u^3+a^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$

228) $\int \frac{u^2du}{u^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln\left(u^3+a^3\right)$

229) $\int \frac{du}{u(u^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left(\frac{u^3}{u^3+a^3}\right)$

230) $\int \frac{du}{u^2(u^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3u} - \frac{1}{6a^4}\ln\frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$

231) $\int \frac{du}{(u^3+a^3)^2} = \frac{u}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5}\ln\frac{(u+a)^2}{u^2-au+a^2}$
$+ \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$

232) $\int \frac{udu}{(u^3+a^3)^2} = \frac{u^2}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4}\ln\frac{u^2-au+a^2}{(u+a)^2}$
$+ \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u-a}{a\sqrt{3}}$

233) $\int \frac{u^2du}{(u^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(u^3+a^3)}$

234) $\int \frac{du}{u(u^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(u^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\left(\frac{u^3}{u^3+a^3}\right)$

235) $\int \frac{du}{u^2(u^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6u} - \frac{u^2}{3a^6(u^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6}\int\frac{udu}{u^3+a^3}$

236) $\int \frac{u^m du}{u^3+a^3} = \frac{u^{m-2}}{m-2} - a^3\int\frac{u^{m-3}du}{u^3+a^3}$

237) $\int \frac{du}{u^n(u^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)u^{n-1}} - \frac{1}{a^3}\int\frac{du}{u^{n-3}(u^3+a^3)}$

Integrales con $u^3 \pm a^3$.

238) $\int \frac{du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln\left(\frac{u^2+au\sqrt{2}+a^2}{u^2-au\sqrt{2}+a^2}\right)$
$\qquad -\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(1-\frac{u\sqrt{2}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(1+\frac{u\sqrt{2}}{a}\right)\right]$

239) $\int \frac{u^2du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln\left(\frac{u^2-au\sqrt{2}+a^2}{u^2+au\sqrt{2}+a^2}\right)$
$\qquad -\frac{1}{2a\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(1-\frac{u\sqrt{2}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(1+\frac{u\sqrt{2}}{a}\right)\right]$

240) $\int \frac{du}{u^2(u^4+a^4)} = -\frac{1}{a^4u} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}} \ln\left(\frac{u^2-au\sqrt{2}+a^2}{u^2+au\sqrt{2}+a^2}\right)$
$\qquad +\frac{1}{2a^5\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(1-\frac{u\sqrt{2}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(1+\frac{u\sqrt{2}}{a}\right)\right]$

241) $\int \frac{u^3du}{u^4+a^4} = \frac{1}{4}\ln\left(u^4+a^4\right)$

242) $\int \frac{du}{u(u^4+a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left(\frac{u^4}{u^4+a^4}\right)$

243) $\int \frac{udu}{u^4+a^4} = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{u^2}{a^2}$

244) $\int \frac{du}{u^3(u^4+a^4)} = -\frac{1}{2a^4u^2} - \frac{1}{2a^6}\tan^{-1}\frac{u^2}{a^2}$

245) $\int \frac{du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) - \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

246) $\int \frac{udu}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a^2}\ln\left(\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\right)$

247) $\int \frac{u^2du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

248) $\int \frac{u^3du}{u^4-a^4} = \frac{1}{4}\ln\left(u^4-a^4\right)$

249) $\int \frac{du}{u(u^4-a^4)} = \frac{1}{4a^4}\ln\left(\frac{u^4-a^4}{u^4}\right)$

250) $\int \frac{du}{u^2(u^4-a^4)} = \frac{1}{a^4u} + \frac{1}{4a^5}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + \frac{1}{2a^5}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

251) $\int \frac{du}{u^3(u^4-a^4)} = \frac{1}{2a^4u^2} + \frac{1}{4a^6}\ln\left(\frac{u^2-a^2}{u^2+a^2}\right)$

Integrales con $\operatorname{sen}(au)$.

252) $\int \operatorname{sen}(au)du = -\frac{\cos(au)}{a}$

253) $\int u\operatorname{sen}(au)du = \frac{\operatorname{sen}(au)}{a^2} - \frac{u\cos(au)}{a}$

254) $\int u^2\operatorname{sen}(au)du = \frac{2u}{a^2}\operatorname{sen}(au) + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{u^2}{a}\right)\cos(au)$

255) $\int u^3\operatorname{sen}(au)du = \left(\frac{3u^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen}(au) + \left(\frac{6u}{a^3} - \frac{u^3}{a}\right)\cos(au)$

256) $\int u^n\operatorname{sen}(au)du = -\frac{u^n\cos(au)}{a} + \frac{n}{a}\int u^{n-1}\cos(au)du$

257) $\int u^n\operatorname{sen}(au)du = -\frac{u^n\cos(au)}{a} + \frac{nu^{n-1}}{a^2}\operatorname{sen}(au)$
$\qquad - \frac{n(n-1)}{a^2}\int u^{n-2}\operatorname{sen}(au)du$

258) $\int \operatorname{sen}^2(au)du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2au)}{4a}$

259) $\int \operatorname{sen}^3(au)du = -\frac{\cos(ax)}{a} + \frac{\cos^3(au)}{3a}$

260) $\int \operatorname{sen}^4(au)du = \frac{3u}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2au)}{4a} + \frac{\operatorname{sen}(4au)}{32a}$

261) $\int u\operatorname{sen}^2(au)du = \frac{u^2}{4} - \frac{u\operatorname{sen}(2au)}{4a} - \frac{\cos(2au)}{8a^2}$

262) $\int \frac{\operatorname{sen}(au)}{u}du = au - \frac{(au)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(au)^5}{5\cdot 5!} - \ldots$

263) $\int \frac{\operatorname{sen}(au)}{u^2}du = -\frac{\operatorname{sen}(au)}{u} + a\int\frac{\cos(au)}{u}du$

264) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}(au)} = \frac{1}{a}\ln\left[\csc(au) - \cot(au)\right] = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{au}{2}\right)\right]$

265) $\int \frac{udu}{\operatorname{sen}(au)} =$
$= \frac{1}{a^2}\left\{au + \frac{(au)^3}{18} + \frac{7(au)^5}{1800} + \ldots + \frac{2\left(2^{2n-1}-1\right)B_n(au)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right\}$

266) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2(au)} = -\frac{1}{a}\cot(au)$

267) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^3(au)} = -\frac{\cos(au)}{2a\operatorname{sen}^2(au)} + \frac{1}{2a}\ln\left[\tan\left(\frac{au}{2}\right)\right]$

268) $\int \operatorname{sen}(pu)\operatorname{sen}(qu)du = \frac{\operatorname{sen}[(p-q)u]}{2(p-q)} - \frac{\operatorname{sen}[(p+q)u]}{2(p+q)}$

269) $\int \frac{du}{1-\operatorname{sen}(au)} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right)$

270) $\int \frac{udu}{1-\operatorname{sen}(au)} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)$

271) $\int \frac{du}{1+\operatorname{sen}(au)} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)$

272) $\int \frac{udu}{1+\operatorname{sen}(au)} = -\frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right)$

273) $\int \frac{du}{(1-\operatorname{sen}(au))^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right)$

274) $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen}ax)^2} = -\frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$

Integrales con $\cos(au)$.

275) $\int \cos(au)du = \frac{\operatorname{sen}(au)}{a}$

276) $\int u\cos(au)du = \frac{\cos(au)}{a^2} + \frac{u\operatorname{sen}(au)}{a}$

277) $\int u^2\cos(au)du = \frac{2u}{a^2}\cos(au) + \left(\frac{u^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen}(au)$

278) $\int u^3\cos(au)du = \left(\frac{3u^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos(au) + \left(\frac{u^3}{a} - \frac{6u}{a^3}\right)\operatorname{sen}(au)$

279) $\int u^n\cos(au)du = \frac{u^n\operatorname{sen}(au)}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}\operatorname{sen}(au)du$

280) $\int u^n\cos(au)du = -\frac{u^n\operatorname{sen}(au)}{a} + \frac{nu^{n-1}}{a^2}\cos(au)$
$\qquad - \frac{n(n-1)}{a^2}\int u^{n-2}\cos(au)du$

281) $\int \cos^2(au)du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2au)}{4a}$

282) $\int \cos^3(au)du = \frac{\operatorname{sen}(au)}{a} - \frac{\operatorname{sen}^3(au)}{3a}$

283) $\int \cos^4(au)du = \frac{3u}{8} + \frac{\operatorname{sen}2(au)}{4a} + \frac{\operatorname{sen}4(au)}{32a}$

284) $\int u\cos^2(au)du = \frac{u^2}{4} + \frac{u\operatorname{sen}2(au)}{4a} + \frac{\cos 2(au)}{8a^2}$

285) $\int \frac{\cos(au)}{u}du = \ln u - \frac{(au)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(au)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(au)^6}{6\cdot 6!} + \ldots$

286) $\int \frac{\cos(au)}{u^2}du = -\frac{\cos(au)}{u} - a\int\frac{\operatorname{sen}(au)}{u}du$

287) $\int \frac{du}{\cos(au)} = \frac{1}{a}\ln\left[\sec(au) + \tan(au)\right] = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right)\right]$

288) $\int \frac{udu}{\cos(au)} =$
$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(au)^2}{2} + \frac{(au)^4}{8} + \frac{5(au)^6}{144} + \ldots + \frac{E_n(au)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \ldots\right\}$

289) $\int \frac{du}{\cos^2(au)} = \frac{\tan(au)}{a}$

290) $\int \frac{du}{\cos^3(au)} = \frac{\operatorname{sen}(au)}{2a\cos^2(au)} + \frac{1}{2a}\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{au}{2}\right)\right]$

291) $\int \cos(au)\cos(pu)du = \frac{\operatorname{sen}[(a-p)u]}{2(a-p)} - \frac{\operatorname{sen}[(a+pu)]}{2(a+p)}$

292) $\int \frac{du}{1-\cos(au)} = -\frac{1}{a}\cot\frac{au}{2}$

293) $\int \frac{udu}{1-\cos(au)} = -\frac{u}{a}\cot\frac{au}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\frac{au}{2}$

294) $\int \frac{du}{1+\cos(au)} = \frac{1}{a}\tan\frac{au}{2}$

295) $\int \frac{udu}{1+\cos(au)} = \frac{u}{a}\tan\frac{au}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{au}{2}$

296) $\int \frac{du}{(1-\cos(au))^2} = -\frac{1}{2a}\cot\frac{au}{2} - \frac{1}{6a}\cot^3\frac{au}{2}$

297) $\int \frac{du}{(1+\cos(au))^2} = \frac{1}{2a}\tan\frac{au}{2} + \frac{1}{6a}\tan^3\frac{au}{2}$

Integrales con $\operatorname{sen}(au)$ y $\cos(au)$.

298) $\int \operatorname{sen}(au)\cos(au)du = \frac{\operatorname{sen}^2(au)}{2a}$

299) $\int \operatorname{sen}(pu)\cos(qu)du = -\frac{\cos[(p-q)u]}{2(p-q)} - \frac{\cos[(p+q)u]}{2(p+q)}$

300) $\int \operatorname{sen}^n(au)\cos(au)du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}(au)}{(n+1)a}$

301) $\int \cos^n(au)\operatorname{sen}(au)du = -\frac{\cos^{n+1}(au)}{(n+1)a}$

302) $\int \operatorname{sen}^2(au)\cos^2(au)du = \frac{u}{8} - \frac{\operatorname{sen}4(au)}{32a}$

303) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}(au)\cos(au)} = \frac{1}{a}\ln[\tan(au)]$

304) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2(au)\cos(au)} = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{au}{2}\right)\right] - \frac{1}{a\operatorname{sen}(au)}$

305) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}(au)\cos^2(au)} = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{au}{2}\right)\right] + \frac{1}{a\cos(au)}$

306) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2(au)\cos^2(au)} = -\frac{2\cot(2au)}{a}$

307) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(au)}{\cos(au)}du = -\frac{\operatorname{sen}(au)}{a} + \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{au}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

308) $\int \frac{\cos^2(au)}{\operatorname{sen}(au)}du = \frac{\cos(au)}{a} + \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{au}{2}\right)\right]$

309) $\int \frac{du}{\operatorname{sen}(au)\pm\cos(au)} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln\tan\left(\frac{au}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)$

310) $\int \frac{\operatorname{sen}(au)du}{\operatorname{sen}(au)\pm\cos(au)} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln[\operatorname{sen}(au)\pm\cos(au)]$

311) $\int \frac{\cos(au)du}{\operatorname{sen}(au)\pm\cos(au)} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln[\operatorname{sen}(au)\pm\cos(au)]$

Integrales con $\tan(au)$.

312) $\int \tan\ (au)\ du = -\frac{1}{a}\ln\cos(au) = \frac{1}{a}\ln\sec(au)$

313) $\int \tan^2(au)du = \frac{\tan(au)}{a} - u$

314) $\int \tan^3(au)du = \frac{\tan^2(au)}{2a} + \frac{1}{a}\ln\cos(au)$

315) $\int \tan^n(au)du = \frac{\tan^{n-1}(au)}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2}(au)\ du$

316) $\int \tan^n(au)\sec^2(au)du = \frac{\tan^{n+1}(au)}{(n+1)a}$

317) $\int \frac{\sec^2(au)}{\tan(au)}du = \frac{1}{a}\ln\tan(au)$

318) $\int \frac{du}{\tan(au)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen}(au)$

319) $\int u\tan^2(au)du = \frac{u\tan(au)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cos(au) - \frac{u^2}{2}$

Integrales con $\cot(au)$.

320) $\int \cot(au)du = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen}(au)$

321) $\int \cot^2(au)du = -\frac{\cot(au)}{a} - u$

322) $\int \cot^3(au)du = -\frac{\cot^2(au)}{2a} - \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen}(au)$

323) $\int \cot^n(au)\csc^2(au)du = -\frac{\cot^{n+1}(au)}{(n+1)a}$

324) $\int \frac{\csc^2(au)}{\cot(au)}du = -\frac{1}{a}\ln\cot(au)$

325) $\int \frac{du}{\cot(au)} = -\frac{1}{a}\ln\cos(au)$

326) $\int u\cot^2(au)du = -\frac{u\cot(au)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\operatorname{sen}(au) - \frac{u^2}{2}$

327) $\int \cot^n(au)du = -\frac{\cot^{n-1}(au)}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2}(au)du$

Integrales con $\sec(au)$.

328) $\int \sec(au)du = \frac{1}{a}\ln[\sec(au)+\tan(au)] = \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

329) $\int \sec^2(au)du = \frac{\tan(au)}{a}$

330) $\int \sec^3(au)du = \frac{\sec(au)\tan(au)}{2a} + \frac{1}{2a}\ln[\sec(au)+\tan(au)]$

331) $\int \sec^n(au)\tan(au)du = \frac{\sec^n(au)}{na}$

332) $\int \frac{du}{\sec(au)} = \frac{\operatorname{sen}(au)}{a}$

333) $\int u\sec^2(au)du = \frac{x}{a}\tan(au) + \frac{1}{a^2}\ln\cos(au)$

334) $\int \sec^n(au)du = \frac{\sec^{n-2}(au)\tan(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(au)du$

Integrales con $\csc(au)$.

335) $\int \csc(au)du = \frac{1}{a}\ln[\csc(au)-\cot(au)] = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\frac{au}{2}\right]$

336) $\int \csc^2(au)du = -\frac{\cot(au)}{a}$

337) $\int \csc^3(au)du = -\frac{\csc(au)\cot(au)}{2a} + \frac{1}{2a}\ln\left[\tan\frac{(au)}{2}\right]$

338) $\int \csc^n(au)\cot(au)du = -\frac{\csc^n(au)}{na}$

339) $\int \frac{du}{\csc(au)} = -\frac{\cos(au)}{a}$

340) $\int u\csc^2(au)du = -\frac{u\cot(au)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln[\operatorname{sen}(au)]$

341) $\int \csc^n(au)du = -\frac{\csc^{n-2}(au)\cot(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(au)du$

Integrales de Funciones Trigonométricas Inversas.

342) $\int \operatorname{sen}^{-1}(u/a)du = u\operatorname{sen}^{-1}(u/a) + \sqrt{a^2-u^2}$

343) $\int u\operatorname{sen}^{-1}(u/a)du = \left(\frac{u^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1}(u/a) + \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{4}$

344) $\int u^2\operatorname{sen}^{-1}(u/a)du = \frac{u^3}{3}\operatorname{sen}^{-1}(u/a) + \frac{\left(u^2+2a^2\right)\sqrt{a^2-u^2}}{9}$

345) $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(u/a)}{u}du = \frac{u}{a} + \frac{(u/a)^3}{2\cdot3\cdot3} + \frac{1\cdot3(u/a)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5(u/a)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots$

346) $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(u/a)}{u^2}du = -\frac{\operatorname{sen}^{-1}(u/a)}{u} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

347) $\int \left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}\right)^2 du = u\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}\right)^2 - 2u + 2\sqrt{a^2-u^2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$

348) $\int \cos^{-1}(u/a)du = u\cos^{-1}\frac{u}{a} - \sqrt{a^2-u^2}$

349) $\int u\cos^{-1}(u/a)du = \left(\frac{u^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\cos^{-1}\frac{u}{a} - \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{4}$

350) $\int u^2\cos^{-1}(u/a)du = \frac{u^3}{3}\cos^{-1}\frac{u}{a} - \frac{\left(u^2-2a^2\right)\sqrt{a^2-u^2}}{9}$

351) $\int \frac{\cos^{-1}(u/a)}{u}du = \frac{\pi}{2}\ln(u) - \int \frac{\operatorname{sen}(u/a)}{u}du$

352) $\int \frac{\cos^{-1}(u/a)}{u^2}du = -\frac{\cos^{-1}(u/a)}{u} + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

353) $\int \left(\cos^{-1}\frac{u}{a}\right)^2 du = u\left(\cos^{-1}\frac{u}{a}\right)^2 - 2u - 2\sqrt{a^2-u^2}\cos^{-1}\frac{u}{a}$

354) $\int \tan^{-1}(u/a)du = u\tan^{-1}(u/a) - \frac{a}{2}\ln\left(u^2+a^2\right)$

355) $\int u\tan^{-1}(u/a)du = \frac{1}{2}\left(u^2+a^2\right)\tan^{-1}(u/a) - \frac{au}{2}$

356) $\int u^2\tan^{-1}(u/a)du = \frac{u^3}{3}\tan^{-1}(u/a) - \frac{au^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln\left(u^2+a^2\right)$

357) $\int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u}du = (u/a) - \frac{(u/a)^3}{3^2} + \frac{(u/a)^5}{5^2} - \frac{(u/a)^7}{7^2} + \ldots$

358) $\int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u^2}du = -\frac{1}{u}\tan^{-1}(u/a) - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u^2+a^2}{u^2}\right)$

359) $\int \cot^{-1}(u/a)du = u\cot^{-1}(u/a) + \frac{a}{2}\ln\left(u^2+a^2\right)$

360) $\int u\cot^{-1}(u/a)du = \frac{1}{2}\left(u^2+a^2\right)\cot^{-1}(u/a) + \frac{au}{2}$

361) $\int u^2\cot^{-1}(u/a)du = \frac{u^3}{3}\cot^{-1}(u/a) + \frac{au^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln\left(u^2+a^2\right)$

362) $\int \frac{\cot^{-1}(u/a)}{u}du = \frac{\pi}{2}\ln u - \int \frac{\tan^{-1}(u/a)}{u}du$

363) $\int \frac{\cot^{-1}(u/a)}{u^2}du = -\frac{\cot^{-1}(u/a)}{u} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u^2+a^2}{u^2}\right)$

364) $\int u^m\operatorname{sen}^{-1}(u/a)du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\operatorname{sen}^{-1}(u/a) - \frac{1}{m+1}\int \frac{u^{m+1}}{\sqrt{a^2-u^2}}du$

365) $\int u^m\cos^{-1}(u/a)du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\cos^{-1}(u/a) + \frac{1}{m+1}\int \frac{u^{m+1}}{\sqrt{a^2-u^2}}du$

366) $\int u^m\tan^{-1}(u/a)du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\tan^{-1}(u/a) - \frac{a}{m+1}\int \frac{u^{m+1}}{u^2+a^2}du$

367) $\int u^m\cot^{-1}(u/a)du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\cot^{-1}(u/a) + \frac{a}{m+1}\int \frac{u^{m+1}}{u^2+a^2}du$

Integrales con e^{au}.

368) $\int e^{au}du = \frac{e^{au}}{a}$

369) $\int u\, e^{au}du = \frac{e^{au}}{a}\left(u-\frac{1}{a}\right)$

370) $\int u^2\, e^{au}du = \frac{e^{au}}{a}\left(u^2-\frac{2u}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$

371) $\int u^n\, e^{au}du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$
$= \frac{e^{au}}{a}\left(u^n - \frac{nu^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)u^{n-2}}{a^2} + ... + \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right)$
con n = entero positivo

372) $\int \frac{e^{au}}{u} = \ln(u) + \frac{au}{1\cdot1!} + \frac{(au)^2}{2\cdot2!} + \frac{(au)^3}{3\cdot3!} + \cdots$

373) $\int \frac{e^{au}}{u^n}du = \frac{-e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{au}}{u^{n-1}}du$

374) $\int \frac{du}{p+qe^{au}} = \frac{u}{p} - \frac{1}{ap}\ln\left(p+qe^{au}\right)$

375) $\int \frac{du}{(p+qe^{au})^2} = \frac{u}{p^2} + \frac{1}{ap\ (p+qe^{au})} - \frac{1}{ap^2}\ln\left|p+qe^{au}\right|$

376) $\int \frac{du}{pe^{au}+qe^{-au}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{pq}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}e^{au}\right) \\ \frac{1}{2a\sqrt{-pq}}\ln\left(\frac{e^{au}-\sqrt{-q/p}}{e^{au}+\sqrt{-q/p}}\right) \end{cases}$

377) $\int e^{au}\operatorname{sen}\,(bu)\ du = \frac{e^{au}[a\operatorname{sen}(bu)-b\cos(bu)]}{a^2-b^2}$

378) $\int e^{au}\cos\,(bu)\ du = \frac{e^{au}[a\cos(bu)+bsen(bu)]}{a^2+b^2}$

379) $\int e^{au}\ln u du = \frac{e^{au}\ln u}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{au}}{u}du$

Integrales con $\ln(u)$.

380) $\int \ln(u)\, du = u\ln(u) - u$

381) $\int [\ln(u)]^2\, du = u[\ln(u)]^2 - 2u\ln(u) + 2u$

382) $\int [\ln(u)]^n\, du = u[\ln(u)]^n - n\int [\ln(u)]^{n-1}\, du$

383) $\int u\ln(u)\, du = \frac{u^2}{2}\left[\ln(u)-\frac{1}{2}\right]$

384) $\int u^m\ln u du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\left(\ln u - \frac{1}{m+1}\right)$

385) $\int \frac{\ln u}{u}du = \frac{1}{2}\ln^2 u$

386) $\int \frac{\ln u}{u^2}du = -\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u}$

387) $\int \ln^2 u du = u\ln^2 u - 2u\ln u + 2u$

388) $\int \frac{\ln^n u du}{u} = \frac{\ln^{n+1} u}{n+1}$

389) $\int \frac{du}{u\ln u} = \ln(\ln u)$

390) $\int \ln\left(u^2+a^2\right) du = u\ln\left(u^2+a^2\right) - 2u + 2a\arctan\frac{u}{a}$

391) $\int \ln\left(u^2-a^2\right) du = u\ln\left(u^2-a^2\right) - 2u + a\ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right)$

Integrales con $\operatorname{senh}(au)$.

392) $\int \operatorname{senh}(au)du = \frac{\cosh(au)}{a}$

393) $\int u\operatorname{senh}(au)du = \frac{u\cosh(au)}{a} - \frac{\operatorname{senh}(au)}{a^2}$

394) $\int u^2\operatorname{senh}(au)du = \left(\frac{u^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right)\cosh(au) - \frac{2u}{a^2}\operatorname{senh}(au)$

395) $\int \frac{\operatorname{senh}(au)}{u}du = au + \frac{(au)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(au)^5}{5\cdot 5!} + \dots$

396) $\int \frac{\operatorname{senh}(au)}{u^2}du = -\frac{\operatorname{senh}(au)}{u} + a\int \frac{\cosh(au)}{u}du$

397) $\int \frac{du}{\operatorname{senh}(au)} = \frac{1}{a}\ln\left[\tanh\left(\frac{au}{2}\right)\right]$

398) $\int \operatorname{senh}^2(au)du = \frac{\operatorname{senh}(au)\cosh(au)}{2a} - \frac{u}{2}$

399) $\int u\operatorname{senh}^2(au)du = \frac{u\operatorname{senh}(2au)}{4a} - \frac{\cosh(2au)}{8a^2} - \frac{u^2}{4}$

400) $\int \frac{du}{\operatorname{senh}^2(au)} = -\frac{\coth(au)}{a}$

401) $\int \operatorname{senh}(au)\operatorname{senh}(pu)du = \frac{\operatorname{senh}[(a+p)u]}{2(a+p)} - \frac{\operatorname{senh}[(a-p)u]}{2(a-p)}$

402) $\int u^m\operatorname{senh}(au)du = \frac{u^m\cosh(au)}{a} - \frac{m}{a}\int u^{m-1}\cosh(au)du$

403) $\int \operatorname{senh}^n(au)du = \frac{\operatorname{senh}^{n-1}(au)\cosh(au)}{an} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2}(au)du$

404) $\int \frac{\operatorname{senh}(au)}{u^n}du = \frac{-\operatorname{senh}(au)}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cosh(au)}{u^{n-1}}du$

405) $\int \frac{du}{\operatorname{senh}^n(au)} = \frac{-\cosh(au)}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1}(au)} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\operatorname{senh}^{n-2}(au)}$

Integrales con $\cosh(au)$.

406) $\int \cosh(au)du = \frac{\operatorname{senh}(au)}{a}$

407) $\int u\cosh(au)du = \frac{u\operatorname{senh}(au)}{a} - \frac{\cosh(au)}{a^2}$

408) $\int u^2\cosh(au)du = -\frac{2u\cosh(au)}{a^2} + \left(\frac{u^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{senh}(au)$

409) $\int \frac{\cosh(au)}{u}du = \ln u + \frac{(au)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(au)^4}{4\cdot 4!} + \frac{(au)^6}{6\cdot 6!} + \dots$

410) $\int \frac{\cosh(au)}{u^2}du = -\frac{\cosh(au)}{u} + a\int \frac{\operatorname{senh}(au)}{u}du$

411) $\int \frac{du}{\cosh(au)} = \frac{2}{a}\tan^{-1}e^{au}$

412) $\int \cosh^2(au)du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{senh}(au)\cosh(au)}{2a}$

413) $\int u\cosh^2(au)du = \frac{u^2}{4} + \frac{u\operatorname{senh}(2au)}{4a} - \frac{\cosh(2au)}{8a^2}$

414) $\int \frac{du}{\cosh^2(au)} = \frac{\tanh(au)}{a}$

415) $\int \cosh(au)\cosh(pu)du = \frac{\operatorname{senh}[(a-pu)]}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{senh}[(a+p)u]}{2(a+p)}$

416) $\int u^m\cosh(au)du = \frac{u^m\operatorname{senh}(au)}{a} - \frac{m}{a}\int u^{m-1}\operatorname{senh}(au)du$

417) $\int \cosh^n(au)du = \frac{\cosh^{n-1}(au)\operatorname{senh}(au)}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2}(au)du$

418) $\int \frac{\cosh(au)}{u^n}du = \frac{-\cosh(au)}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\operatorname{senh}(au)}{u^{n-1}}du$

419) $\int \frac{du}{\cosh^n(au)} = \frac{\operatorname{senh}(au)}{a(n-1)\cosh^{n-1}(au)} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cosh^{n-2}(au)}$

5. Transformadas de Laplace

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{k}{s}$	k con $k = constante$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$ con $n > 0$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$ con $n > 0$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\operatorname{sen}(at)}{a}$

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{\cos(at)}{a}$
$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\operatorname{sen}(at)}{a}$
$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos(at)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\operatorname{senh}(at)}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\operatorname{senh}(at)}{a}$
$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh(at)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$ con $a \neq b$

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$ con $a \neq b$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen}(at)-at\cos(at)}{2a^3}$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{sen}(at)}{2a}$
$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen}(at)+at\cos(at)}{2a}$
$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos(at)-\frac{1}{2}at\operatorname{sen}(at)$
$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos(at)$
$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh(at)-\sinh(at)}{2a^3}$
$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{senh}(at)}{2a}$
$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh}(at)+at\cosh(at)}{2a}$
$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh(at)+\frac{1}{2}at\operatorname{senh}(at)$
$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh(at)$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen}(at)-3at\cos(at)}{8a^5}$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\operatorname{sen}(at)-at^2\cos(at)}{8a^3}$
$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\operatorname{sen}(at)-at\cos(at)}{8a^3}$
$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{sen}(at)+at^2\cos(at)}{8a}$
$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)a^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen}(at)+5at\cos(at)}{8a}$

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos(at)-7at\operatorname{sen}(at)}{8}$
$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{sen}(at)}{2a}$
$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos(at)$
$\dfrac{s^4-6a^2s+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos(at)$
$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{sen}(at)}{24a}$
$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh}(at)-3at\cosh(at)}{8a^5}$
$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh(at)-t\operatorname{senh}(at)}{8a^3}$
$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh(at)+(a^2t^2-1)\operatorname{senh}(at)}{8a^3}$
$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{senh}(at)+at^2\cosh(at)}{8a}$
$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh}(at)+5at\cosh(at)}{8a}$
$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh(at)+7at\operatorname{senh}(at)}{8}$
$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{senh}(at)}{2a}$
$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh(at)$
$\dfrac{s^4+6a^2s+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh(at)$
$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{senh}(at)}{24a}$
$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{-3at/2}\right)$

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-e^{-3at/2}\right)$
$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left(e^{3at/2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
$\dfrac{s}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right)$
$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}\Big(\mathrm{sen}(at)\cosh(at)-\cos(at)\,\mathrm{senh}(at)\Big)$
$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{senh}(at)}{2a^2}$
$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\Big(\mathrm{sen}(at)\cosh(at)+\cos(at)\,\mathrm{senh}(at)\Big)$
$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos(at)\cosh(at)$
$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}\Big(\mathrm{senh}(at)-\mathrm{sen}(at)\Big)$

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}\Big(\cosh(at)-\cos(at)\Big)$
$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\Big(\mathrm{senh}(at)+\mathrm{sen}(at)\Big)$
$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}\Big(\cosh(at)+\cos(at)\Big)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\mathrm{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\mathrm{fer}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}\mathrm{fcer}\left(b\sqrt{t}\right)\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$

A en grados	A en radianes	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
270°	$3\pi/2$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

Definición 1. Ecuación en Variables Separadas.
Consideremos la ecuación con forma estándar:

$$M(x)\mathrm{d}x + N(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

La solución se obtiene integrando directamente:

$$\int M(x)\mathrm{d}x + \int N(y)\mathrm{d}y = C$$

Definición 2. Ecuación en Variables Separables.
Las siguientes dos ecuaciones, son ecuaciones en variables separables.

$$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

Para determinar la solución de la Ec.(2), se divide la ecuación entre: $M_2(x)N_1(y)$, para reducirla a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = 0$$

ahora sólo se integra directamente:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = C$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{3}$$

La solución de la Ec.(3), se obtiene al dividir entre $g(y)$ y multiplicar por $\mathrm{d}x$, para reducirla a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

ahora sólo se integra directamente:

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

Definición 3. Ecuación Lineal.
La ecuación lineal tiene la forma general:

$$a(x)y' + b(x)y = g(x) \tag{4}$$

$a(x)$, se llama **coeficiente principal**. La Ec.(4) se tiene que dividir entre $a(x)$ para obtener la **forma estándar**:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{5}$$

La Ec.(5) tiene a 1 como coeficiente principal y a partir de aquí se obtiene la solución de la Ec.(4), La solución es:

$$y(x) = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int P(x)\mathrm{d}x}Q(x)\mathrm{d}x + C\right]$$

Si $Q(x) = 0$, la solución es:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

El termino $e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ se llama *Factor Integrante* de la ecuación.

Definición 4. Ecuación de Bernoulli.
Tiene la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{6}$$

con $n \neq 0$ y $n \neq 1$, n puede ser positivo o negativo. Con el cambio de variable $z = y^{-n+1}$, la ecuación de Bernoulli se reduce a la ecuación lineal:

$$z' + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x) \tag{7}$$

al resolver la Ec.(7), se obtiene que la solución de la Ec.(6) de Bernoulli es:

$$y^{-n+1} = e^{-\int(-n+1)P(x)\mathrm{d}x}\left[(-n+1)\int e^{\int(-n+1)P(x)\mathrm{d}x}Q(x)\mathrm{d}x + C\right]$$

Definición 5. Ecuaciones Exactas o en Diferenciales Totales.
Consideramos la ecuación:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{8}$$

donde se cumple: $M_y = N_x$. La solución se obtiene de calcular:

i) $u = \int M(x,y)\mathrm{d}x$, **iii)** $v = \int [N(x,y) - u_y]\mathrm{d}y$

ii) calculamos: u_y **iv)** **La solución general implícita es:** $u + v = C$

Definición 6. Factor Integrante.
Consideremos la ecuación:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{9}$$

donde $M_y \neq N_x$. Para determinar la solución de esta ecuación, se tiene que reducir a una ecuación exacta; así que `primero` se debe calcular uno de los dos posibles factores integrantes:

$$1)\ \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\mathrm{d}x} \qquad\qquad 2)\ \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\mathrm{d}y}$$

`segundo` se multiplica la Ec.(9) por el factor integrante que exista y se obtiene la ecuación exacta:

$$\mu M(x,y)\mathrm{d}x + \mu N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{10}$$

la solución de la Ec.(10), que ya se sabe resolver, es la solución de la Ec.(9).

Definición 7. Función Homogénea.
Se dice que una función $f(x,y)$ es una "*función homogénea de grado n*" respecto a las variables x e y, si para cualquier valor real λ se cumple la propiedad:

$$f(x\lambda, y\lambda) = \lambda^n f(x,y)$$

donde $n \in \mathbb{R}$. En particular, cuando $n = 0$ se tiene una *función homogénea de grado cero*, se cumple que:

$$f(x\lambda, y\lambda) = f(x,y)$$

Definición 8. Ecuaciones Homogéneas de Grado Cero.
Consideremos las ecuaciones:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{12}$$

Se dice que la Ec.(11) es homogénea de grado cero, si tanto $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.
La Ec.(12) será homogénea si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero. Las Ecs.(11) y (12) se transforman en ecuaciones en variables separadas al utilizar los cambios de variables: $u = \frac{y}{x}$ y $v = \frac{x}{y}$.
Si N es algebraicamente más sencilla que M, se elige $u = \frac{y}{x}$. *Si M es algebraicamente más sencilla que N, se elige $v = \frac{x}{y}$.*

A) *Con el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$.*

✎ **La Ec.**(11) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du = 0 \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du = C$$

la solución de la Ec.(11) se obtiene al sustituir nuevamente u por $\frac{y}{x}$ en el resultado de la integral.

✎ **La Ec.**(12) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \text{la cual se integra directamente} \quad \int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C$$

la solución de la Ec.(12) se obtiene al sustituir nuevamente u por $\frac{y}{x}$ en el resultado de la integral.

B) *Con el cambio de variable* $v = \frac{x}{y}$.

✎ **La Ec.**(11) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{dy}{y} + \frac{M(v,1)}{N(v,1)+vM(v,1)}dv = 0 \qquad \text{la cual se integra directamente} \qquad \int \frac{dy}{y} + \int \frac{M(v,1)}{N(v,1)+vM(v,1)}dv = C$$

la solución de la Ec.(11) se obtiene al sustituir nuevamente v por $\frac{x}{y}$ en el resultado de la integral.

✎ **La Ec.**(12) se reduce a la ecuación en variables separadas:

$$\frac{dv}{\frac{1}{f(v,1)} - v} = \frac{dy}{y} \qquad \text{la cual se integra directamente} \qquad \int \frac{dv}{\frac{1}{f(v,1)} - v} = \int \frac{dy}{y} + C$$

la solución de la Ec.(12) se obtiene al sustituir nuevamente v por $\frac{x}{y}$ en el resultado de la integral.

I. Wronskiano.

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Renglón de las funciones.} \\ \text{Primera derivada de las funciones.} \\ \text{Segunda derivada de las funciones.} \\ \vdots \\ \text{Derivada de orden } n-1 \text{ de las funciones.} \end{array}$$

- Si el $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$, entonces, el conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es linealmente dependiente (LD).
- Si el $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$, entonces, el conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente (LI).

(1) Cálculo de $y_h(x)$. **Ecuación Auxiliar.**

`Primero.` Dada la ecuación:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x) \tag{13}$$

establecer la ecuación homogénea asociada:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{14}$$

`Segundo.` Establecer la *ecuación auxiliar*:

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{15}$$

la Ec.(15) es un polinomio de grado n, en la variable m. Al resolver este polinomio se pueden tener:

⋆ raíces reales y diferentes
⋆ raíces reales repetidas
⋆ raíces conjugadas complejas, y
⋆ raíces conjugadas complejas repetidas

Por esta razón $y_h(x)$ consta de cuatro partes: $y_h(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$, ¡¡ no necesariamente existen los cuatro casos !!

Caso i. Raíces Reales y Diferentes, $y_1(x)$.
Sean $m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots$ las raíces reales y diferentes de (15), entonces, una parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_1(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + \cdots \tag{16}$$

Caso ii. Raíces Reales Repetidas, $y_2(x)$.
Sean $m = m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \cdots$ las raíces reales repetidas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_2(x) = C_1e^{mx} + C_2\boldsymbol{x}e^{mx} + C_3\boldsymbol{x^2}e^{mx} + C_4\boldsymbol{x^3}e^{mx} + \cdots \tag{17}$$

Caso iii. Raíces Conjugadas Complejas, $y_3(x)$.
Sean $m_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i,\ m_2 = \alpha_2 \pm \beta_2 i,\ m_3 = \alpha_3 \pm \beta_3 i, \ldots$ las raíces complejas conjugadas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_3(x) = e^{\alpha_1 x}\big[C_1\cos(\beta_1 x) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta_1 x)\big] + e^{\alpha_2 x}\big[C_3\cos(\beta_2 x) + C_4\,\mathrm{sen}(\beta_2 x)\big] + e^{\alpha_3 x}\big[C_5\cos(\beta_3 x) + C_6\,\mathrm{sen}(\beta_3 x)\big] + \cdots \quad (18)$$

Nota: *Obsérvese que se toma el valor positivo de β en todos las casos.*

Caso iv. Raíces Conjugadas Complejas Repetidas, $y_4(x)$.
Sean $m_1 = \alpha \pm \beta i\ =\ m_2 = \alpha \pm \beta i\ =\ m_3 = \alpha \pm \beta i\ = \cdots$ las raíces conjugadas complejas repetidas de (15), entonces, otra parte de $y_h(x)$ se escribe como:

$$y_4(x) = e^{\alpha x}\big[C_1\cos(\beta x) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta x)\big] + \boldsymbol{x}e^{\alpha x}\big[C_3\cos(\beta x) + C_4\,\mathrm{sen}(\beta x)\big] + \boldsymbol{x^2}e^{\alpha x}\big[C_5\cos(\beta x) + C_6\,\mathrm{sen}(\beta x)\big] + \cdots \quad (19)$$

Nota: *Obsérvese que se toma el valor positivo de β en todos las casos.*

• Conjunto Fundamental de Soluciones (CFS). Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluciones LI de la Ec.(14). Entonces el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se llama *Conjunto Fundamental de Soluciones* para la Ec.(14).

(2) Cálculo de soluciones particulares $y_p(x)$ para la Ec.(13).

Primer Método: **Coeficientes Indeterminados.**
La solución $y_p(x)$ depende de la forma que tiene $g(x)$. Por esta razón se utiliza la siguiente tabla:

si $g(x)$ es	entonces $y_p(x)$ se propone como
$k - cte$	A
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0$
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\,\mathrm{sen}(ax)$
$\mathrm{sen}(ax)$	$A\cos(ax) + B\,\mathrm{sen}(ax)$
e^{ax}	Ae^{ax}

Si $g(x)$ es una multiplicación de las anteriores formas, $y_p(x)$ se propone como una multiplicación de las respectivas $y_p(x)$.

Una vez propuesta $y_p(x)$, se debe calcular la solución general homogénea $y_h(x)$ y verificar que los términos de $y_p(x)$ no aparezcan en $y_h(x)$; pero si algún término de $y_p(x)$ aparecen en $y_h(x)$, entonces, se deberá multiplicar dicho término por x o x^2 o $x^3 \ldots$ o por alguna potencia x^n, hasta que dicho término de la solución particular $y_p(x)$ no aparezcan en la solución $y_h(x)$. Después $y_p(x)$ debe derivarse según las derivadas que aparecen en la Ec.(13); ya calculadas las derivadas, se sustituyen en la Ec.(13) para comparar coeficientes y determinar sus respectivos valores.

Segundo Método: **Variación de Parámetros.**
Cuando el término independiente $g(x)$ no tiene la forma de alguno de los de la tabla de coeficientes indeterminados, es cuando se utiliza *variación de parámetros.*

Se debe determinar el conjunto fundamental de soluciones (CFS) de la ecuación homogénea asociada (14). En general, una manera de determinar un CFS para la Ec.(14), es a partir de la solución general homogénea $y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) + \cdots + C_ky_k(x)$, el CFS es:

$$\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_k(x)\}$$

Primero. Sólo se trabajará con EDO-LOS de segundo y tercer orden. Entonces se deben determinar los conjuntos fundamentales de soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$ o $\{\, y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)\,\}$, según se trate de una EDO de segundo o tercer orden respectivamente.

`Segundo.`

Caso i. Ecuación de segundo orden.

La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2$$

donde:

$$u_1' = \frac{-g(x)y_2}{W[y_1,y_2]}, \qquad u_1 = \int \frac{-g(x)y_2}{W[y_1,y_2]}dx$$

$$u_2' = \frac{g(x)y_1}{W[y_1,y_2]}, \qquad u_2 = \int \frac{g(x)y_1}{W[y_1,y_2]}dx$$

Caso ii. Ecuación de tercer orden.

La solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

donde:

$$u_1' = \frac{g(x)[y_2y_3^{'} - y_3y_2^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}, \qquad u_1 = \int \frac{g(x)[y_2y_3^{'} - y_3y_2^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}dx$$

$$u_2' = \frac{g(x)[-y_1y_3^{'} + y_3y_1^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}, \qquad u_2 = \int \frac{g(x)[-y_1y_3^{'} + y_3y_1^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}dx$$

$$u_3' = \frac{g(x)[y_1y_2^{'} - y_2y_1^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}, \qquad u_3 = \int \frac{g(x)[y_1y_2^{'} - y_2y_1^{'}]}{W[y_1,y_2,y_3]}dx$$

Finalmente la solución general de la Ec.(13) se obtiene de sumar $y_h(x)$ y las $y_p(x)$ obtenidas por coeficientes indeterminados y/o por variación de parámetros.

II. Transformada de Laplace $\mathscr{L}$.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe si $f(t)$ es seccionalmente (por tramos) continua en $[0,\infty)$ y es de orden exponencial.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

una vez calculada la integral, representamos por $F(s)$ a $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

Y en general: $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, $\mathscr{L}\{h(t)\} = H(s), \ldots$

Propiedades de la Transformada de Laplace.

• La transformada de Laplace es lineal porque:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{kf(t)\} &= k\mathscr{L}\{f(t)\}\\ \mathscr{L}\{k_1f(t) + k_2g(t)\} &= k_1\mathscr{L}\{f(t)\} + k_2\mathscr{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

donde: k, k_1 y k_2 son constantes.

• Transformada de una Derivada.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y\} &= Y(s)\\ \mathscr{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0)\\ \mathscr{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\\ \mathscr{L}\{y'''\} &= s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\\ &\vdots\\ \mathscr{L}\{y^{(n)}\} &= s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

• Primer Teorema de Traslación o de Desplazamiento:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Primero identificamos el valor de a y se calcula $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Segundo se calcula $F(s)\big|_{s=s-a}$, y así se cumple que $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.

• Función Escalón Unitario de Heaviside, denotada como $\mathscr{U}(t-a)$ o $H(t-a)$.

$$H(t-a) = \mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a; \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

• Función por partes en términos la función escalón unitario. Sea

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \leq t \leq a \\ f_2(t) & a \leq t < b \\ f_3(t) & b \leq t < c \\ f_4(t) & t \geq c \end{cases}$$

entonces: $f(t) = f_1(t)\mathscr{U}(t) + \big[f_2(t) - f_1(t)\big]\mathscr{U}(t-a) + \big[f_3(t) - f_2(t)\big]\mathscr{U}(t-b) + \big[f_4(t) - f_3(t)\big]\mathscr{U}(t-c)$

• Segundo Teorema de Traslación:

$$\mathscr{L}\{f(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\Big\{f(t)\big|_{t=t+a}\Big\}$$

Primero se identifica el valor de a y $f(t)$. Segundo, se calcula $f(t)\big|_{t=t+a}$. Tercero se calcula $\mathscr{L}\Big\{f(t)\big|_{t=t+a}\Big\}$. Y así se tiene que $\mathscr{L}\{f(t)\mathscr{U}a\} = e^{-as}\mathscr{L}\Big\{f(t)\big|_{t=t+a}\Big\}$

III. Transformada Inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}$.

Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de alguna función $f(t)$. Entonces, se dice que $f(t)$ es la *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, y se denota con $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

• La Transformada Inversa de Laplace es Lineal porque:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\{kF(s)\} &= k\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} \\ \mathscr{L}^{-1}\{k_1F(s) + k_2G(s)\} &= k_1\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + k_2\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \end{aligned}$$

donde: k, k_1 y k_2 son constantes.

Propiedades de la Transformada Inversa de Laplace.

• Forma Inversa del Primer Teorema de Traslación.

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

• Forma Inversa del Segundo Teorema de Traslación.

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t)\big|_{t=t-a}\mathscr{U}a$$

Primero identificar el valor de a y $F(s)$. Segundo calcular $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Tercero evaluar $f(t)\big|_{t=t-a}$ y así se tiene que $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t)\big|_{t=t-a}\mathscr{U}a$.